© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2009 г.

УДК 517.53

Некоторые несобственные интегралы

Зиновьев Б.С., канд. физ.-мат. наук, Елкина Г.М., Третьякова И.Ю., доценты

Методом теории вычетов комплексного анализа найдены шесть действительных интегралов первого рода, что демонстрирует тесную связь комплексного и действительного анализа. Для нахождения трех интегралов сформулирована и доказана теорема.

Ключевые слова: интеграл, вычеты, полюс, аналитическая функция, особая точка.

Several improper integrals

Zinov'yev B.S., cand. phys. math. sci., Yolkina G.M., Tret'yakova I.Yu.

Six real integrals of the first type are found by means of the theory of residues in complex analysis. This result shows the close interconnection between complex analysis and real analysis. To find the last three integrals, theorem is formulated and proved.

Key words: integral, residues, pole, analytic function, singular point.

Рассмотрим следующие интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^4+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3},\quad a>0;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{a^4+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a},\quad a>0;$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(a^4+x^4\right)^2}=\frac{3\pi}{8\sqrt{2}a^7},\quad a>0;$$

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{a^4+x^4}=\frac{\pi}{4a^2},\quad a>0;$$

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{\left(a^4+x^4\right)^2}=\frac{\pi}{8a^6},\quad a>0;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^5dx}{\left(a^4+x^4\right)^2}=\frac{\pi}{8a^2},\quad a>0.$$

Для нахождения интегралов потребуется следующая известная теорема.

Теорема 1 (см.[2]). Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости $(y\ge 0)$, кроме конечного числа особых точек $a_1, a_2..., a_n$, $\operatorname{Im} a_k>0, k=1,2,...,n.$ Бесконечно удаленная точка является нулем порядка не ниже второго. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(a_k),$$

где $\operatorname{res} f(a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim\left(\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right)$ для полюса в точке a функции $f(z)$ порядка m.

1. Для первого интеграла подынтегральная функция имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{a^4+z^4}.$$

Особые точки в верхней полуплоскости – $z_1=ae^{i\frac{\pi}{4}}$ и $z_2=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$. Это полюса первого порядка.

Найдем

$$\operatorname{res} f(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{a^4+z^4}=-\frac{\sqrt{2}}{8a^3}(1+i).$$

Аналогично находим

$$\operatorname{res} f(z_2)=\frac{\sqrt{2}}{8a^3}(1-i).$$

Условия теоремы 1 выполняются, и поэтому

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^4+x^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^4+x^4}=$$

$$=\pi i\left(\operatorname{res} f(z_1)+\operatorname{res} f(z_2)\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}.$$

В другой записи этот интеграл содержится в [1, с.185] и в [3, с.313].

2. Для второго интеграла подынтегральная функция имеет вид

$$f(z)=\frac{z^2}{a^4+z^4}.$$

Здесь особые точки те же.

Найдем

$$\operatorname{res} f(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)z^2}{a^4+z^4}=\frac{1}{4z_1}=$$

$$=\frac{1}{4a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Аналогично находим

$$\operatorname{res} f(z_2)=\frac{1}{4a}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Условия теоремы 1 также выполняются, и поэтому

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{a^4 + x^4} = \pi i \left(\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2) \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a}.$$

В частном случае этот интеграл также содержится в [1, с. 184] и в [3, с. 313], но в другой записи.

3. Для третьего интеграла подынтегральная функция имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{\left(a^4 + z^4\right)^2}.$$

В верхней полуплоскости точки $z_1 = ae^{i\frac{\pi}{4}}$ и $z_2 = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ являются полюсами второго порядка. Найдем вычеты в этих точках:

$$\operatorname{res} f(z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz} (z - z_1)^2 \frac{1}{\left(a^4 + z^4\right)^2} = \frac{-3}{16 z_1^7}.$$

Аналогично находим

$$\operatorname{res} f(z_2) = -\frac{3}{16 z_2^7}.$$

Поскольку условия теоремы 1 также выполняются, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(a^4 + x^4\right)^2} = \pi i \left(\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2) \right) =$$

$$= -\frac{3\pi i}{16 a^7} \left(e^{\left(-i\frac{\pi}{4}\right)^7} + e^{\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)^7} \right) = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}a^7}.$$

Этот интеграл в [1] отсутствует.

Для нахождения остальных трех интегралов сформулируем и докажем теорему 2.

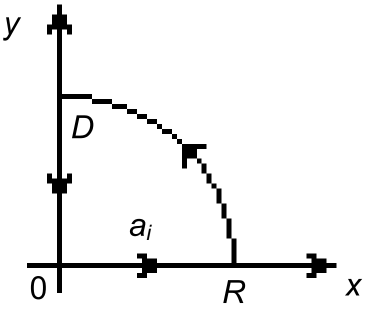
Теорема 2. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в первом квадранте $(x \ge 0, \quad y \ge 0)$, за исключением конечного числа особых точек $a_k, k = 1,\ldots,n.$

$\operatorname{Im} a_k > 0, \operatorname{Re} a_k > 0$ и $f(iy) = if(y)$.

Бесконечно удаленная точка является нулем порядка, не ниже второго. Тогда

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k).$$

Доказательство. По основной теореме о вычетах (см. рисунок)



$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k) =$$

$$= \int_0^R f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_R^0 f(iy)diy =$$

$$= \int_0^R f(x)dx + \int_0^R f(y)dy + \int_{\Gamma_R} f(z)dz =$$

$$= 2\int_0^R f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz.$$

Пусть $R \to \infty$. Тогда

$$\int_0^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2} \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \pi i \sum_{K=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k).$$

Оценим

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| < \frac{C}{R^2} \frac{\pi R}{2} = \frac{C\pi}{R} \to 0, \quad R \to \infty.$$

Теорема доказана.

4. Для подынтегральной функции $f(z) = \dfrac{z}{a^4 + z^4}$ условия теоремы 2 выполнены и точка $z_0 = ae^{i\frac{\pi}{4}}$ является полюсом первого порядка, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, $Re\, z_0 > 0$.

Найдем вычет:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{z}{a^4 + z^4} = \frac{1}{i 4 a^2}.$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{a^4 + x^4} = \pi i \operatorname{res} f(z_0) = \pi i \frac{1}{i 4 a^2} = \frac{\pi}{4a^2}.$$

В частном случае при $a = 1$ этот интеграл приведен в [1, с. 184].

5. Пусть $f(z) = \dfrac{z}{\left(a^4 + z^4\right)^2}.$

Применим теорему 2. Точка $z_0 = ae^{i\frac{\pi}{4}}$ является полюсом второго порядка для функции $f(z)$.

Найдем

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \frac{(z - z_0)^2 z}{\left(a^4 + z^4\right)^2} = \frac{1}{i 8 a^6}.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\left(a^4 + x^4\right)^2} = \pi i \left(\frac{1}{i 8 a^6} \right) = \frac{\pi}{8a^6}.$$

В [1] данного интеграла нет.

6. Пусть $f(z) = \dfrac{z^5}{\left(a^4 + z^4\right)^2}$.

Точка $z_0 = ae^{i\frac{\pi}{4}}$ – полюс второго порядка для функции $f(z)$.

Найдем

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}(z - z_0)^2 f(z) =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \frac{(z - z_0)^2 z^5}{\left(a^4 + z^4\right)^2} = \frac{1}{i8a^2}.$$

По теореме 2, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5 dx}{\left(a^4 + x^4\right)^2} = \pi i \operatorname{res} f(z_0) = \frac{\pi}{8a^2}.$$

В [1] этого интеграла нет.

Отметим, что рассмотренные выше шесть интегралов можно вычислить и с помощью нахождения первообразных.

Список литературы

1. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1964.
2. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. Ч.1. – М., 1976.
3. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. – М.: Наука,1981.

Зиновьев Борис Сергеевич,
Ивановский государственный энергетический университет,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.
e-mail: higher@math.ispu.ru

Елкина Галина Михайловна,
Ивановский государственный энергетический университет,
доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.

Третьякова Ирина Юрьевна,
Ивановский государственный энергетический университет,
доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.